

Sottospazio affine di $(A, f, V_n(\mathbb{K}))$

$S \subseteq A$ tale che $\exists W \leq V_n(\mathbb{K})$

con $(S, \check{f}, W)$ spazio affine

$$\check{f} = f \cap \underbrace{(S \times S)}_{\text{dominio}} \times W \quad \text{codominio.}$$

Teorema: Sottospazi affini e sott. ~~affini~~

lineari sono la stessa cosa

Sottospazio lineare

$$[P; W] := \{P + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\}.$$

In coordinate: traslato di

W secondo il vettore $\vec{OP}$

Dim: $[P; W]$ sottospazio lineare

$\Rightarrow (P, \check{f}, W)$ è uno sp. affine.

$$\forall X, Y \in [P; W] \quad \check{f}(X, Y) = \vec{X}Y =$$

$$= \vec{X}P + P\vec{Y} = \vec{P}\vec{Y} - \vec{P}X \text{ con}$$

$$\vec{P}\vec{Y} \in W; \vec{P}X \in W \Rightarrow \vec{X}Y \in W.$$

Viceversa $\forall R \in [P; W], \forall \vec{w} \in W;$

$$R + \vec{w} = (P + \vec{x}) + \vec{w} = P + (\vec{x} + \vec{w}) \in [P; W]$$

OGNI SOTTOSPAZIO LINEARE è AFFINE.

$(S, \vec{f}, W)$ sott. affine $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists P \in S$

ed associato $S = L(P; W)$. Chiamiamo $L(P; W) \subseteq S$

sia ora $R \in S \Rightarrow \vec{PR} \in W$ per def. di sott. affine

$\Rightarrow P + \vec{PR} \in L(P; W)$ e $P + \vec{PR} = R \Rightarrow R \in L(P; W) \Rightarrow$

$S \subseteq L(P; W) \Rightarrow S = L(P; W)$

□

$AG_n(K) = (A, f, V_n(K))$ e fissiamo $P = (0, O_3)$ $O \in A$

$\downarrow \psi_n$

(K^n, g, K^n)

$O_3 = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$.

$g(P, Q) = Q - P$

Teorema: $\exists \psi_n$ $S \subseteq A$ è un sottospazio di $AG_n(K)$

$\Leftrightarrow$ Le coordinate dei punti di S sono
l'insieme delle soluzioni di un sistema
lineare compatibile.

DLM:

Sia $AX = B$ compatibile $\Rightarrow S = \{X_0 + Z \mid Z \in \text{Ker}(A)\}$
ed X_0 soluzione particolare

$\Rightarrow S = [X_0; \text{Ker}(A)] \Rightarrow S$ è sottospazio
in coord. di $A \in M_n(K)$ $\square$

Supponiamo $S = [X_0; W]$ vogliamo trovare
un vettore lineare che abbia come soluzioni
esattamente gli elementi di S .

$$X \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{X_0 X} \in W \Leftrightarrow (X - X_0) \overset{\text{in coord.}}{\in} W$$

Sia $(y_1 \dots y_k)$ una base di $W \Rightarrow$

$$(X - X_0) \in W \Leftrightarrow L(X - X_0, y_1, \dots, y_k) = L(y_1, \dots, y_k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi_k \begin{pmatrix} X - X_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \pi_k \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

A questo punto si impone che tutti i det.
dei minori $(k+1) \times (k+1)$ siano uguali a zero
 $\Rightarrow$ in generale si hanno $(n-k)$ equazioni
indipendenti (usando il teorema degli orbitali).

□

Def: Sia $[S; W]$ un sottospazio di $AG_n(1k)$.

Allora si ha diminuzione di $[S; W]$ e di W .

(W) = sottospazio di traslazione).

Def: $[S; W]$ è de Ho $AG_n(k)$

# eq.	$\dim W$	$[S; W]$	W	$\{S\} \neq S$
n eq.	0	{pt} punto	—	
$n-1$	1	π retta	—	direzione di π
$n-2$	2	π piano	—	giacitura di π
$n-3$	3	Σ solido	—	
1	$n-1$	Π iperpiano	—	sof. di traslazione.

Un iperpiano è un sof. di $AG_n(k)$ descritto da una equazione lineare.

Ogni sottospazio di $AG_n(k)$ si ottiene come intersezione di iperpiani.

Oss: Siano $S = [P; W]$ e $T = [A; U]$ due sof. di $AG_n(k)$. Allora se $S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow$

$$S \cap T = [R; W \cap U].$$

In

particolare se

$S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow S \cap T$ è un sottospazio.

Dim:

a) $[P; W] = [X; W]$

per ogni $X \in W$ infatti:

$$\text{Se } X \in [P; W] \Rightarrow \vec{P}X \in W$$

$$\text{e } \forall Y \in [P; W] \text{ si ha}$$

$$\vec{X}Y = \vec{X}P + \vec{P}Y = -\vec{P}X + \vec{P}Y \in W \Rightarrow Y \in [X; W]$$

Il viceversa è analogo. $\Rightarrow$ in particolare come origine di $[P; W]$ si può scegliere qualsiasi suo punto.

b) Se $S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow \exists R \in S \cap T \Rightarrow S = [P; W] = [R; W]$

$$T = [Q; U] = [R; U]$$

D'altro canto $X \in [R; W] \cap [R; U] \Leftrightarrow \vec{R}X \in W \cap U \Leftrightarrow$

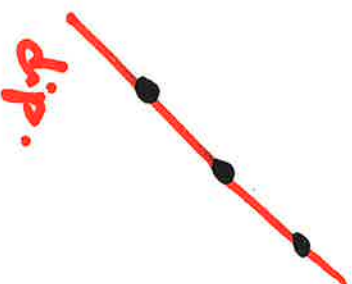
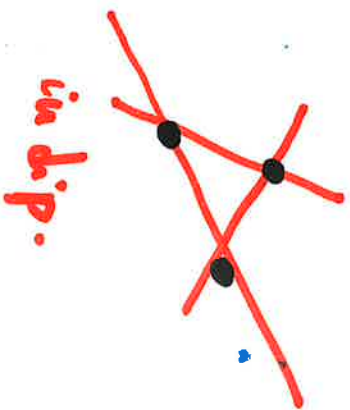
$$\Leftrightarrow X \in [R; W \cap U]$$

Def. Siauo

$P_2 \dots P_{r+1}$ punti di $AG_n(K)$.
Si dice notospazio generale da $P_2 \dots P_{r+1}$ il

più piccolo notospazio che contiene tutti i
Def I punti $P_2 \dots P_{r+1}$ sono indipendenti:

(geometricamente indipendenti) se il sottospazio
generato da qualsiasi loro sottoinsieme proprio
è più piccolo di quello che essi generano.



OSS: in coordinate i punti $P_2 \dots P_{r+1}$ sono
indipendenti $\Leftrightarrow$ il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_2 \\ P_3 - P_2 \\ \vdots \\ P_{r+1} - P_2 \end{bmatrix} \text{ è uguale a } t.$$

cioè $\Leftrightarrow$ essi generano un sottospazio di dim t .

Siano infatti $P_2 \dots P_{r+1}$ i punti dati $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ essi necessariamente appartengono al sottospazio

$$[P_2; L(\vec{P}_2 P_3 \dots P_r P_{r+1})]$$

Dall'altro lato se i vettori $\vec{P}_2 P_3 \dots P_r P_{r+1}$ sono
lin. indipendenti $\Rightarrow$ non esiste alcun sott. di dim $< t$
che li contenga tutti e dunque anche i

che generano ed ha dim $= t$.

Altrimenti: $[P_2; L(\vec{r}_2 P_2 \dots \vec{r}_t P_t)]$ è contenuto in ogni sott. che ~~non~~ contiene $\{P_2 \dots P_{t+2}\}$, contiene tali punti e dunque $\leq$ il sott. generato da dim $\leq$ dim $L(P_2 P_3 \dots P_t P_{t+1}) =$

$$= n_k [P_2 - P_2; \vdots; P_{t+1} - P_2].$$

N.B.: $t+2$ punti

$\rightarrow$ sottospazio affine di dim $\leq t$

In particolare

1) 2 punti lineari generano una retta. $\rightarrow$ dim $= 1$

$$[P_2; L(\vec{r}_2 P_2)]$$

2) 3 punti non allineari generano un piano

$$[P_2; L(\vec{P}_2, \vec{P}_3)]$$

con $\vec{P}_3, \vec{P}_2$ lin. indep cioè $\vec{P}_2 \vec{P}_3 \notin L(P_2 P_3)$

$$\text{cioè } P_3 \in [P_2; L(\vec{P}_2)]$$

Equazioni della retta e proprietà della sfera.

π_0 è una retta π è un sottospazio del tipo $[P; L(\vec{v})]$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$P = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n) \quad \text{in } AG_n(k)$$

$$\vec{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$$

$$X \in \pi_0 \Leftrightarrow X = P + \vec{w} \text{ con } \vec{w} \in L(\vec{v}) \text{ e quindi } \vec{w} = \alpha \vec{v}$$

$$(x_1 \dots x_n) = (p_1 + \alpha v_1 \ \dots \ p_n + \alpha v_n) \quad \alpha \in k$$

eq. parametrica di π .

$$n=2: \quad x = x_P + \alpha \ell$$

$$y = y_P + \alpha m$$

$$\alpha \in \mathbb{K}$$

$$\bar{v} = (\ell, u)$$

$$P = (x_P, y_P)$$

$$n=3:$$

$$x = x_P + \alpha \ell$$

$$y = y_P + \alpha m$$

$$z = z_P + \alpha n$$

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$

$$\bar{v} = (\ell, u, n).$$

eg. cartesiane

$$\frac{x_1 - p_1}{x_2 - p_2} \dots \frac{x_n - p_n}{x_n - p_n} = 1$$

$$\left| \frac{x_1 - p_1}{x_2 - p_2} \dots \frac{x_n - p_n}{x_n - p_n} \right| = 0 \Rightarrow v_2 (x_1 - p_1) = v_2 (x_2 - p_2)$$

$$\frac{(x_1 - p_1)}{v_2} = \frac{(x_2 - p_2)}{v_2}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - p_2 & x_3 - p_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{(x_2 - p_2)}{v_2} = \frac{(x_3 - p_3)}{v_3}$$

dopo n passaggi:

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{v_n} \quad \text{ovv} \quad \frac{x_i - p_i}{0}$$

significa $x_i = p_i$
è una delle eq.

$$n=2 \quad \frac{x - x_P}{c} = \frac{y - y_P}{m} \rightarrow y = \frac{m}{c}(x - x_P) + y_P \quad \text{se } c \neq 0$$

$$n=3 \quad \frac{x - x_P}{c} = \frac{y - y_P}{m} = \frac{z - z_P}{n}$$

simultaneamente: mette per 2 punti:

$$P = (p_1 \dots p_n) \quad P \neq Q$$

$$Q = (q_1 \dots q_n)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = Q - P = (q_1 - p_1 \dots q_n - p_n)$$

$$\frac{x_1 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_1 - p_2}{q_1 - p_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{q_n - p_n}$$

$$\underline{n=2}$$

$$\frac{x - x_p}{x_q - x_p} = \frac{y - y_p}{y_q - y_p}$$

$$n=3$$

$$\frac{x - x_p}{x_q - x_p} = \frac{y - y_p}{y_q - y_p} = \frac{z - z_p}{z_q - z_p}.$$

oss: per 2 punti distinti passa una ed una sola retta.

Def:

Due sottospazi di $AG_n(k)$ $\pi = [P; W]$, $\Sigma = [Q; U]$

sono detti

paralleli $\Leftrightarrow$

$$W \subseteq U$$

oppure $U \subseteq W$

ed in tal caso si scrive $\pi // \Sigma$.

oss 1) Se $\dim \pi = \dim \Sigma \Rightarrow$

$\pi // \Sigma$ e c'è solo π $u = w$.

2) Se $\pi // \Sigma$ e $\pi \cap \Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \pi \subseteq \Sigma$ oppure
 $\Sigma \subseteq \pi$

(in particolare se $\dim \pi = \dim \Sigma$ e $\pi // \Sigma \Rightarrow \pi = \Sigma$).
Se $\pi \cap \Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \exists R \in \pi \cap \Sigma$

$$[P; w] \cap [Q; u] = [R; w] \cap [u] = [R; w] \text{ e } w \subseteq u$$

oppure $[R; u] \text{ e } u \subseteq w$.

$$\Rightarrow = [P; w] \text{ e } w \subseteq u \text{ o } [Q; u] \text{ e } u \subseteq w.$$

conseguenza: 2 rette parallele o coincidono o sono
disgiunte.

$n=2$ vale l'assioma di Euclide:

→ due rette distinte non sono parallele.

→ data una retta π ed un punto P con $P \notin \pi$
[$\exists$! retta passante per P con $\cap \pi = \emptyset$ e tale
retta è parallela ad π .]

Sia π una retta in $AG_2(k)$

$$\pi: ax + by + c = 0$$

$$\text{e sia } P = (x_P, y_P) \in AG_2(k).$$

Consideriamo una retta γ per P

$$a'(x - x_P) + b'(y - y_P) = 0$$

tradiamo il problema dato da u_n .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} c \\ -x_p a' - y_p b' \end{vmatrix}$$

$A \qquad B$

io voglio $\pi_n \cap \mathcal{D} = \emptyset \Leftrightarrow$ il problema è
incompatibile $\Leftrightarrow \pi_k(A) \neq \pi_k(A|B)$

$$\Leftrightarrow \pi_k(A) = 1 \text{ e } \pi_k(A|B) = 2$$

$$\pi_k(A) = 1 \Leftrightarrow (a', b') \in \mathcal{L}((a, b))$$

cioè $a x + b y = 0$ ha le stesse sol.

$$\text{di } a' x + b' y = 0 \Leftrightarrow \ker(a, b) = \ker(a', b')$$

or

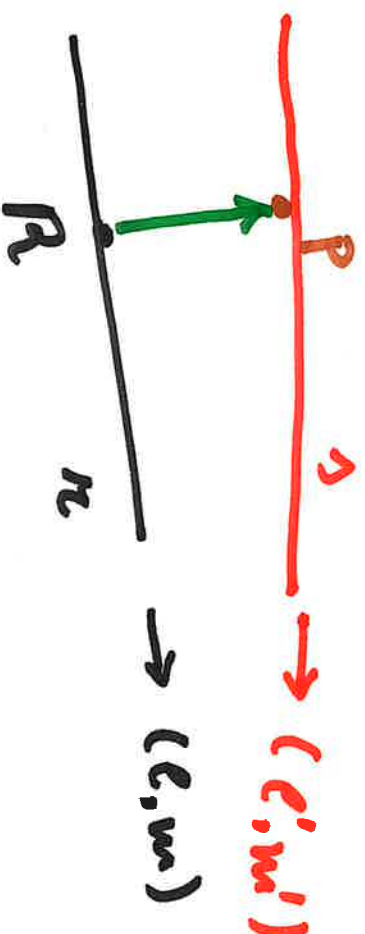
$\Leftrightarrow \pi_0 // \lambda$. (hanno la stessa direzione)

$$\pi_k(A|B) = 2 \Leftrightarrow P \notin \pi \text{ perché altrimenti}$$

avremmo $\pi_0 = \lambda \Rightarrow \infty^2$ soluzioni.



DIM ALTERNATIVA



$$\pi(e', m') \in \lambda((e, m)) \in P \notin \pi \Rightarrow \lambda \cap \pi = \emptyset.$$

Vettori $\ell' (\ell', m')$ ed $\ell (\ell, m)$ non sono
 proporzionali $\Rightarrow$ essi generano $\mathbb{R}^2$
 in particolare anche $\vec{PR} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{PR} = \alpha (\ell, m) + \beta (\ell', m')$$

$$\forall \ell \in \pi \wedge \Rightarrow Q = P + \alpha (\ell', m') = \\ = R + b (\ell, m)$$

per qualche $\alpha, b \in \mathbb{R}$

$$R = P + PR$$

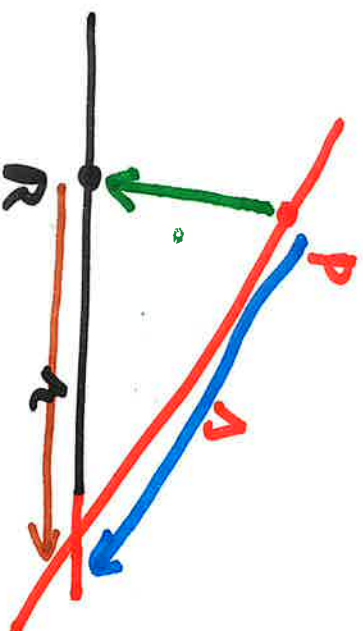
$$P + \alpha (\ell', m') = P + \alpha (\ell, m) + \beta (\ell', m') + \\ b (\ell, m)$$

$$(\alpha - \beta) (\ell', m') = (\alpha + b) (\ell, m)$$

$m_1 (l', n') \in (l, n)$ same lin. indep

$\Rightarrow l'$ unique value $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \beta \\ b = -a \end{cases}$

$\Rightarrow \pi_1 \neq \phi$



$\square$